Studies on toric Fano varieties

著者	佐藤 拓
号	44
学位授与番号	1818
URL	http://hdl.handle.net/10097/38814

氏名・(本籍)	佐藤　拓（さとう　ひろし）
学位の種類	博　士(理　学)
学位記番号	理博第１８１８号
学位授与年月日	平成 13 年 3 月 26 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Studies on toric Fano varieties (トーリック・ファノ多様体の研究)
論文審査委員	(主査) 教授 石田正典 教授 雪江明彦，板東重稔

論　文　目　次

論　文　内　容　要　旨

ファノ多様体とは，ゴーレンシュタイン的な完備代数多様体であって，その反標準因子がアンプルとなるものである。ファノ多様体は極小モデル理論を考える上で重要であり，代数幾何学の重要な対象の一つである。特にバティレフは，鏡映対称なカラビ・ヤウ多様体の対の例を，トーリック・ファノ多様体の超曲面として組織的に構成した。本論文では，トーリック・ファノ多様体に関する研究を行った。本論文は3章からなり，1章では主として4次元非特異トーリック・ファノ多様体の分類について，2章では非特異完備トーリック多様体の変形について，そして3章では4次元非特異トーリック・ファノ多様体へのアーベル曲面の埋め込みの可能性について述べた。

次元を固定した場合に，非特異トーリック・ファノ多様体の同型類全体が有限になる事がバティレフにより示されている。2次元の場合，非特異トーリック・ファノ多様体の同型類の個数が5である事はよく知られている。3次元についても，バティレフ，渡辺・渡辺によって独立に，同型類の個数が18である事が示された。4次元の場合，バティレフによる，同型類の個数は123，という分類結果があったが，バティレフの分類には不完全な部分があり，本論文で完全な分類を与えた。分類は，4次元非特異トーリック・ファノ多様体の同型類全体の中で，ファノ性を保ったまま，同変ブロー・アップ，同変ブロー・ダウンで繋げる事が出来るものを同値と定義し，この同値関係に関する完全代表系を求める事で行った。その際重要なのは，バティレフにより導入された，原始的コレクション，原始的関係といった概念であり，本論文ではこれらの概念を用いて，同変ブロー・アップ，同変ブロー・ダウン，ファノ性の判定等を扱えるようにした。その結果，完全代表系の個数は3になり，4次元非特異トーリック・ファノ多様体

の同型類の個数は124である事を示した。先のバティレフの分類結果には，2次元射影空間2つの直積を3回同変ブロー・アップしたものが不足している事がわかった。また，分類の過程で，4次元非特異トーリック・ファノ多様体間の，同変ブロー・アップ，同変ブロー・ダウンを全て決定した。更に高次元でも同様の同値関係を考え，非特異トーリック・ファノ多様体が射影空間と同値になるための十分条件をいくつか与えた。この分類のアルゴリズムは，コンピューターのプログラムに乗せることも可能で，4次元ではこのプログラムによっても分類結果を確認することができた。他の応用として，3次元非特異ファノ多様体間の射が，ファノを経由したブロー・アップの合成に分解する，という森の定理をトーリックの場合に示した。

次数が奇数及び偶数のヒルツェブルフ曲面全体がそれぞれ変形で移り合う事はよく知られている。また，射影直線上の射影空間束に対しても，同様の事が成り立つ事がハリスにより示されている。本論文では，これらの結果の一つの一般化として，多少の条件がつくが，射影直線上のファイブレーションを持つような，非特異完備トーリック多様体のみからなる複素解析族を構成した。この複素解析族は複素平面上定義されており，原点以外の点上のファイバーは全て互いに同型になる。構成はコックスによるトーリック多様体の斉次座標環の言葉を用いて成される。射影直線上のファイブレーションを持つ事から，対応する扇は一般ファイバーに対応する1次元低い完備扇を境に二つの非完備扇に分かれるが，それぞれの扇に対応する非完備トーリック多様体の斉次座標を具体的に書き下して，これら二つの非完備トーリック多様体をパラメーターをつけて張り合わせるのである。この複素解析族の応用として，非特異トーリック・弱ファノ多様体であって，この複素解析族に関して，非特異トーリック・ファノ多様体に変形するものを，4次元以下の場合について決定した。ここで，弱ファノ多様体とは，ゴーレンシュタイン的な完備代数多様体であって，反標準因子がネフかつビッグとなるものであり，非特異弱ファノ多様体のうちファノ多様体に変形するようなものは，弱化ファノ多様体と呼ばれ，3次元の場合皆川による研究がある。更に本論文では，クロイツァー・スカークにより分類された3次元反射的多面体を正則三角形分割する事により，ピカール数が3以下の3次元非特異トーリック・弱ファノ多様体を分類して，ピカール数が3以下のトーリック・弱化ファノ多様体を全て決定した。

4次元非特異射影的トーリック多様体には3次元アーベル多様体が埋め込めない事が知られている。よって次に考えるべき問題は，4次元非特異射影的トーリック多様体にアーベル曲面が埋め込めるかどうか，という問題である。ただし自明な埋め込みを除くために，強い条件ではあるが，埋め込まれたアーベル曲面が全てのトーリック主因子と曲線で交わる，という条件をつける。4次元射影空間，射影直線と3次元射影空間の直積の場合には，ホロックス・マンフォード，ランゲにより，それぞれアーベル曲面の埋め込みの存在が示されており，直既約な階数2の局所自由層の構成等にも応用されている。ピカール数が2の非特異射影的トーリック多様体の場合には，サンカランによるいくつかの結果がある。本論文では，サンカラン，梶原の結果を応用しやすいように工夫し，分類された124個の4次元非特異トーリック・ファノ多様体の場合について，アーベル曲面の埋め込みが存在するかどうかの問題を考えた。結果として，4次元射影空間，射影直線と3次元射影空間の直積，2つのトーリック・デル・ペッツォ曲面の直積の場合にはアーベル曲面の埋め込みが存在し，その他の場合には，21個の例外を除いて，アーベル曲面の埋め込みが存在しない事を示した。非存在性の証明は，アーベル曲面の埋め込みの存在を仮定して，その埋め込みから定まるあるグラフを計算し，グラフの非連結性に矛盾する事を示す事で行われる。この方法は，非特異トーリック・ファノ多様体に限らず，もっと一般に，非特異射影的トーリック多様体に対しても適用出来る。

論文審査の結果の要旨

特異点のない複素射影代数多様体 X の反標準因子 K がアンプルであるときに X をファノ多様体と呼ぶ。ファノ多様体の分類は 3 次元までは完成しているが，4 次元では具体的な分類には程遠い。しかし 4 次元の場合，反標準因子は既約非特異であればカラビ・ヤウ超曲面となるので，物理学の場の量子論におけるミラー対称性との関連でファノ多様体への関心は高い。

佐藤拓による博士論文の 1 章では 4 次元トーリック多様体でファノ多様体となるものの分類を完成させている。この分類については，すでにバチレフによる論文があり分類表が与えられていたが，佐藤の論文ではバチレフとは異なる方法でバチレフの分類表ではもれていた一つを含め，124 個の 4 次元トーリック・ファノ多様体に同型で分類されることが示された。

射影直線上の射影直線束であるヒルツェブルフ曲面は 0 以上の整数で与えられる次数で決まるが，なめらかな変形族において，ずっとある次数のヒルツェブルフ曲面であったものが，突然偶数差の高い次数のヒルツェブルフ曲面に複素構造が変化することがあるのはよく知られている。2 章ではこの現象が超平面とその上下の三層に分かれた扇の特徴に由来していることを示し，この現象が高次元のトーリック多様体でも起こることを示している。

3 章では 4 次元トーリック多様体内で代数的トーラスを除いた部分の各既約因子に交わるようなアーベル曲面の存在を調べ，1 章で分類した 124 個のうち 21 個についてはまだ不明であるが，残りの 103 個について，このようなアーベル曲面の存在の有無を彼自身の分類表に基づき示した。

これらの結果は佐藤拓が自立して研究活動を行うのに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，佐藤拓提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。